Coordenação: Prof. Dr. Nilson José Machado

Nem tudo é abstrato no reino dos complexos

Walter Spinelli

1. Números são símbolos, ou não?

Cotidianamente utilizamos números para

- representar o resultado de uma contagem de quantidade;
- comparar duas grandezas de mesma natureza ou de naturezas diferentes;
- ordenar elementos a partir de determinado critério
- identificar determinada característica de um elemento

A primeira função de um número na vida de uma criança está relacionada à contagem de quantidades discretas (dedos da mão, palitos de sorvete, feijões etc). Logo elas aprendem a representar essas quantidades por intermédio de símbolos, os numerais arábicos. A partir de certo momento, as crianças conseguem associar o resultado das contagens que realizam ao símbolo apropriado para representá-lo. Esse é, talvez, o momento em que passam a relacionar-se com quantidades discretas de outra forma, sem exigir a representação bruta de todos os elementos. Tal premissa sugere a possibilidade de que, ao final da etapa descrita, as crianças se relacionem com os números de modo abstrato, ou seja, que a construção conceitual realizada, com origem no concreto, caminhou no sentido do abstrato, encerrando-se ao atingi-lo. Será esse, de fato o sentido do processo de construção conceitual, do concreto ao abstrato?

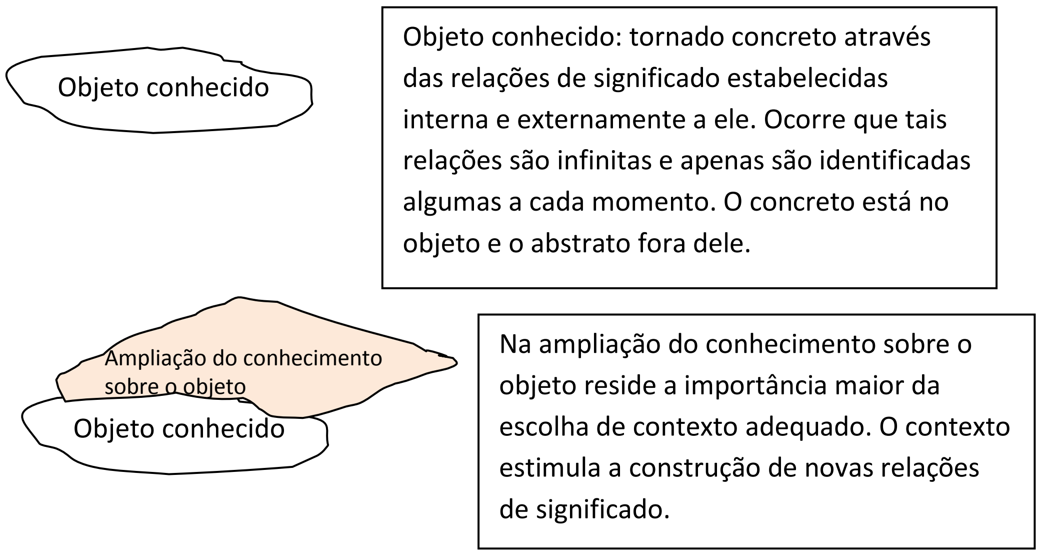
No sentido de responder à questão colocada, vale refletir sobre o significado do termo "concreto" aqui adotado. O conhecimento popular consagrou o uso desse termo para designar elementos discretos e palpáveis, como tijolos, copos, melancias, casas etc. No âmbito educacional, todavia, concreto ganha outros significados.

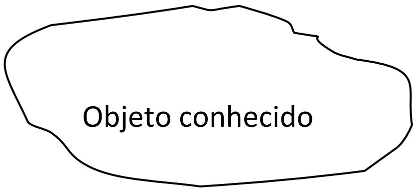
Resolvemos situações problema envolvendo retângulos sem jamais termos tocado em um deles, e nem poderíamos vir a fazê-lo. Calculamos medidas de diagonais, perímetros, áreas etc, a partir da representação mental que fazemos do polígono, pelo conhecimento que temos de suas propriedades – paralelismo entre lados, ângulos retos, lados congruentes -. Assim, um retângulo - objeto abstrato - é feito concreto a partir das relações de significado que estabelecemos entre suas propriedades. Ou seja, um retângulo, bem como qualquer outro ente geométrico, é, na verdade, um feixe de múltiplas relações, ampliadas à medida que evoluímos no conhecimento sobre o objeto. Nessa perspectiva, objeto concreto é aquele para o qual conseguimos estabelecer relações de significado, ou, em outros termos, *concreto é o que se conhece, o que se sabe*.

Admitindo que o conhecimento sobre o objeto torna-o concreto na medida em que somos capazes de perceber e de utilizar as múltiplas relações de significado existentes entre elementos próprios do objeto e também para além dele, podemos compreender o caminho do conhecimento sobre o objeto segundo o modelo de algo semelhante a uma espiral, que se inicia no concreto e a ele volta. Ou seja, partimos daquilo que conhecemos sobre o objeto para ampliarmos esse conhecimento e voltarmos a ele, vendo-o, agora, em relações de naturezas diferentes daquelas que víamos inicialmente. São, portanto, dois estágios de concretude, definidos e diferenciados pela quantidade e qualidade das relações de significado que conseguimos estabelecer interna e externamente ao objeto de estudo. O "elevador" que permite superar um estágio e atingir o próximo é formado pelo conjunto das **abstrações** que realizamos sobre o **contexto** em que o objeto é analisado. Nessa perspectiva, os atos de abstrair e de contextualizar compõem um ciclo contínuo, com justaposições indissociáveis, que harmonizadas adequadamente estimulam a construção conceitual, como escreveu Lefebvre:

> "*Tal como entre o imediato e o mediato, tampouco pode existir entre o abstrato e o concreto uma separação metafísica, uma diferença de natureza*"

Simbolicamente, podemos representar da seguinte forma o processo descrito:





Novas relações de significados conceituais foram estabelecidas; o conhecimento *concreto* sobre o objeto foi ampliado. Novas ampliações implicam em reviver o processo.

Esta exposição parte, portanto, de duas premissas. A primeira delas refere-se ao caminho da construção conceitual, que parte sempre do concreto e a ele volta retorna, encontrando-o, na volta, fortalecido pelas novas relações de significados que foram estabelecidas durante o processo. A segunda premissa aceita que o caminho de um estágio a outro de concretude, com toda a qualidade das abstrações exigidas, não se realiza sem que os objetos de estudo sejam analisados a partir de contextos significativos. Tratemos, pois, de justificar esta segunda premissa.

Por contextualizar entendemos, aqui, o ato de estabelecer relações entre objetos com base em características comuns, quando analisados sob determinado ponto de vista. A fertilidade dessas relações depende do pano de fundo escolhido para a identificação e análise dos significados do objeto.

Dicionários apontam definições para o termo "contextualizar", ou, de outra forma, para "contextuar". Tanto um termo quanto outro referem-se a "*conjugar*", ou a

- *estabelecer ou apresentar o contexto de,*
- *tecer,*
- *formar o contexto,*
- *intercalar num texto.*

A partir dessas definições podemos notar a importância de, por um lado, identificar, aproximar e relacionar significados conceituais do objeto de estudo (tecer) e, por outro, de selecionar o conjunto de circunstâncias sobre o qual as relações entre significados conceituais tornam-se pertinentes (formar o contexto).

Para a análise do estudo dos números complexos, que faremos em seguida, partiremos pois, das premissas destacadas, ou seja:

- O conhecimento sobre o objeto parte do concreto e a ele retorna, reformulado, em um movimento contínuo;
- As abstrações constituem-se no elemento capaz de estimular a passagem de um nível a outro de concretude;
- As abstrações são elaboradas sobre determinados contextos ou, dito de outra forma, sobre um conjunto de circunstâncias no qual se destacam relações de significados conceituais.

2. <u>Sobre os complexos, sem os números.</u>

A grande indignação dos alunos de Ensino Médio, e também de muitos professores, quando do estudo dos números complexos (não Reais) refere-se ao fato de que esse tipo de número não se adequa a nenhuma das necessidades pertinentes a seu cotidiano. Afinal, números complexos não exprimem resultados de contagens e nem representam quantidades; além disso, não faz muito sentido ordená-los, e usá-los como elemento básico de codificação é, no mínimo, estranho. Assim, de acordo apenas com os usos que os alunos conhecem até então, um complexo não mereceria receber o título de "número".

Boa parte do tradicional estudo dos Complexos no Ensino Médio fica restrita ao tratamento das operações entre eles, de modo semelhante ao qual é submitida a criança quando, na educação infantil, começa a tomar contato com as operações entre números naturais. Se o estudo das operações pelas crianças, nesse caso, ocorre sobre o contexto de suas práticas cotidianas – contagem de pontos nos jogos, cálculo do troco na cantina etc – vale refletir sobre qual contexto se desenvolve o estudo das operações entre complexos no nível médio.

Conteúdos matemáticos podem ser estudados basicamente sobre dois tipos de contextos, sendo um deles voltado para aplicações dos conceitos em situações do cotidiano do aluno, e o outro centrado nas relações internas à própria matemática, na lógica e na estrutura que se estabelece entre seus conceitos. Não devemos imaginar, todavia, que o desenvolvimento de um planejamento pedagógico, em qualquer nível, se estabeleça com base apenas em um desses dois tipos de contextos, sendo mais provável identificarmos constantes interesecções entre eles. No caso dos números complexos, entretanto, o tratamento costumeiro desenvolve-se unicamente sobre o contexto das relações internas à própria matemática, sendo praticamente impossível detectar a presença de significados conceituais para além desse âmbito.

Retomando as premissas estabelecidas no item anterior, acerca do caminho do conhecimento e do papel das abstrações, como podemos compreender o estudo dos números complexos no Ensino Médio?

De modo bastante simplificado, podemos entender que o conhecimento concreto dos alunos acerca dos números reais é o patamar inicial para as necessárias abstrações que precisarão realizar a fim de construírem significados acerca dos complexos. Se isto é válido, convém questionar quais são as abstrações necessárias para que seja atingido o nível superior de conhecimento concreto, e quais são os significados conceituais que, esperamos, serão agregados àqueles anteriormente construídos?

A escolha do caminho das necessárias abstrações envolve tomar a decisão de apresentar os "complexos" aos alunos, sem os "números". Ou seja, convém, de início, deixar claro que os complexos não são importantes enquanto números, como os alunos conhecem até então, e que sua importância reside na possibilidade serem utilizados como "operadores", capazes de gerenciar transformações isométricas no plano. Compreender e operar com os complexos com este objetivo – gerenciar rotações, reflexões e translações – formará a etapa de concretude superior, além da compreensão dos Reais. O contexto sobre o qual se desenvolverá o estudo será formado, unicamente, pelas múltiplas relações de significado entre os conceitos matemáticos ou, em outros termos, procedimentos matemáticos serão os elementos que alimentarão as abstrações necessárias.

3. <u>Complexos: uma possível abordagem</u>

O ponto de partida para o estudo dos complexos pode ser o conhecimento que os alunos possuem acerca da resolução de problemas envolvendo número Reais. Para tanto, podemos recuperar a fórmula de Cardano para a resolução de determinado tipo de equação polinomial de 3º grau, e propor que resolvam algumas das clássicas situações envolvendo a raiz quadrada de um número negativo, como, por exemplo, estes:

Uma das raízes de uma equação de 3º grau do tipo

$$y^3 + My + N = 0$$

pode ser obtida através da expressão:

$$y = \sqrt[3]{-\frac{N}{2}+\sqrt{\frac{N^2}{4}+\frac{M^3}{27}}} + \sqrt[3]{-\frac{N}{2}-\sqrt{\frac{N^2}{4}+\frac{M^3}{27}}}$$

Encontre uma raiz da equação $y^3 - 3y - 2 = 0$.

Um marceneiro quer construir duas caixas, uma com a forma de um cubo de aresta x, outra com a forma de um paralelepípedo com a base retangular, de lados 3m e 5m, e de altura igual à altura do cubo. O valor de x deve ser escolhido de tal forma que o volume do cubo seja $4m^3$ maior do que o do paralelepípedo.

a) Escreva a equação que traduz a exigência a ser satisfeita pelo valor de x.

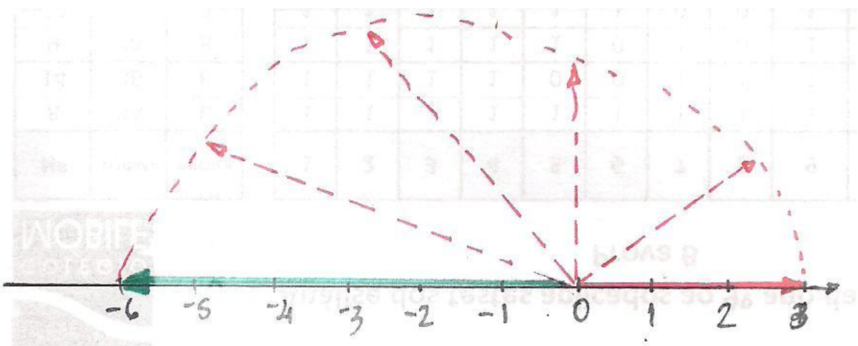
b) Verifique diretamente na equação dada que x = 4 é uma raiz, ou seja, fazendo x = 4m, temos o cubo com volume 64 m^3 e o paralelepípedo com volume 60 m^3.

c) Use a fórmula de Cardano-Tartaglia para determinar as raízes da equação do item a). A que conclusão você chega?

Problemas como estes mostram, por um lado, a impossibilidade de obter-se as raízes quadradas de números negativos e, por outro, a necessidade de se relacionar os conhecimentos concretos estabelecidos pela fórmula de Cardano e pela solução real, e concreta, do problema. De um modo ou de outro, imaginamos que a busca pela superação dessas dificuldades possa servir de motivação – e de contexto – para a apresentação dos complexos aos nossos alunos.

Se a apresentação é convincente, o percurso seguinte não pode ficar restrito à utilização dos complexos como recurso para a "resolução" de equações polinomiais, ou ao estudo das propriedades das operações entre eles. Rapidamente é necessário atingir o degrau do verdadeiro significado dos complexos, que reside na possibilidade de serem gerenciadores de transformações isométricas no plano. Para tanto, a apresentação do plano de Argand-Gauss e a associação entre este plano e a reta Real passa a ser prioridade.

De início, podemos mostrar aos alunos o significado de multiplicar um número real por um número real negativo, como por exemplo, 3.(-2)



Nesse caso, rotacionamos de 180 º um vetor associado ao 3, além de dobrarmos seu módulo. O passo seguinte pode consistir no questionamento aos alunos sobre como podemos indicar uma rotação de 90º do vetor original associado ao número 3. Espera-se que os alunos concluam que é necessário multiplicar 3 por um fator que seja a raiz quadrada do fator anterior, que produziu a rotação de 180º. Ou seja, espera-se que respondam $\sqrt{-2}$, pois

$$3.\underbrace{\sqrt{-2}}_{90^0}.\underbrace{\sqrt{-2}}_{90^0} = 3.\underbrace{(-2)}_{180^0}$$

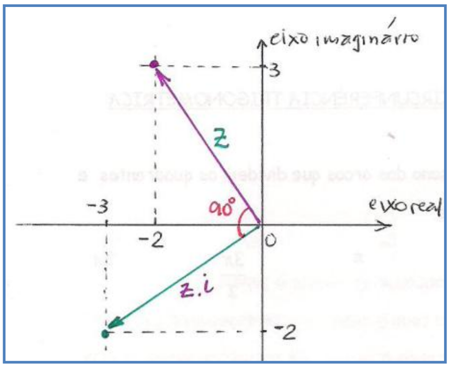
Dessa idéia inicial poderemos evoluir rapidamente para a apresentação da unidade imaginária (i) e para a importância de multiplicarmos um número real qualquer por múltiplos e submúltiplos dessa unidade, produzindo, assim, rotações e ampliações/reduções nos módulos dos vetores. Em seguida, podemos considerar a multiplicação de números complexos, não reais, por imaginários puros, como por exemplo, (-2 + 3i).(i), mostrando a rotação e a ampliação do módulo do vetor que parte de (0, 0) e atinge (-2, 3). Isto pode ser feito por intermédio de problemas como este, por exemplo:

*Multiplicando um número complexo **z**, não nulo, pela unidade imaginária (**i**), o vetor associado a **z** rotaciona 90º em torno da origem e no sentido anti horário. Veja no exemplo ao lado que*

$$z = -2 + 3i$$

$$z.i = (-2 + 3i).i = -2i + 3i^2$$

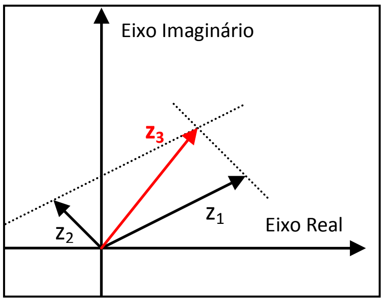
$$z.i = -3 - 2i$$



*Desenhe em seu caderno o plano de Argand-Gauss, e represente nele os vetores associados aos números **w = 1 + 3i**, e **- 2.w.i**, ou seja o produto de **w** por **-2** e pela unidade imaginária.*

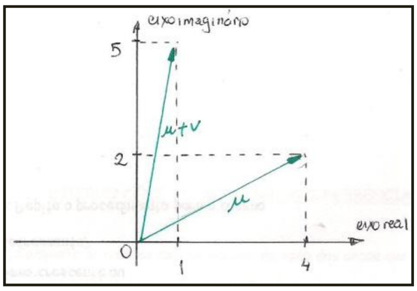
Insistimos, aqui, na rotação dos vetores, embora seja necessário também discutir como os alunos as outras transformações – translação e reflexão. Para discutir esses casos, podemos apresentar problemas envolvendo a adição vetorial e a multiplicação de complexos por reais, como por exemplo nas situações seguintes:

Observe o plano complexo com os vetores associados aos números $z_1 = 3 + 2i$ *e* $z_2 = -1 - i$. *Determine o número complexo* z_3



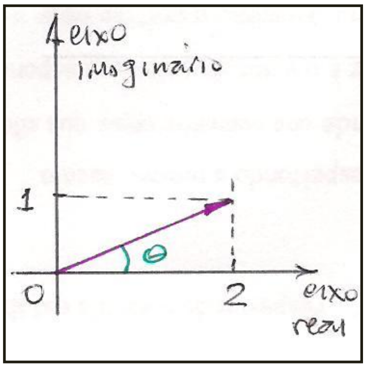
*Observe o plano de Argand-Gauss com o vetor associado ao número complexo **u** e o vetor associado à soma **u + v**.*

a) *Quais são as coordenadas do afixo do número **v**?*
b) *Desenhe o plano de Argand-Gauss em seu caderno e represente nele os vetores associados aos números **u**, **v** e **u + v**.*



Considere o vetor que podemos associar ao número complexo ***v = 2 + i****, representado no plano de Argand-Gauss. Esse vetor forma determinado ângulo θ com o eixo real. Determine, em função de θ, o ângulo formado entre a orientação positiva do eixo real e o número*

a) 2v   b) i.v   c) (-1).v   d) -2.i.v



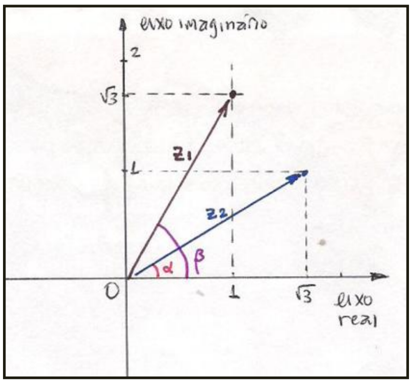
Retomando as rotações, trata-se agora de mostrar como a representação trigonométrica dos números complexos pode nos ajudar a promover rotações de ângulos de quaisquer medidas, e não apenas para ângulos múltiplos de 90°, como fizemos até agora. Temos, assim, uma boa oportunidade de contextualizar o estudo dos complexos com base no desenvolvimento de outro conteúdo matemático: a adição de arcos. Para tanto, poderá ser pedido que os alunos resolvam problemas como este:

Observe o plano de Argand-Gauss com a representação dos vetores associados a dois números complexos.

a) escreva z_1 e z_2 na forma ***a + bi***

b) Determine as medidas dos ângulos α e β a partir da razão trigonométrica tangente nos triângulos retângulos com catetos de medidas ***a*** *e* ***b*** *em cada caso.*

c) Efetue a multiplicação $z_1.z_2$



d) Qual é o ângulo que o vetor associado ao produto $z_1.z_2$ forma com a orientação positiva do eixo real?

e) Efetue a divisão $z_1:z_2$

Demonstrado que na multiplicação/divisão de complexos multiplicamos/dividimos os módulos e somamos/subtraímos os argumentos principais dos números envolvidos, o próximo passo é nomear como elemento básico das rotações isométricas dos vetores (sem alteração do módulo) o número complexo

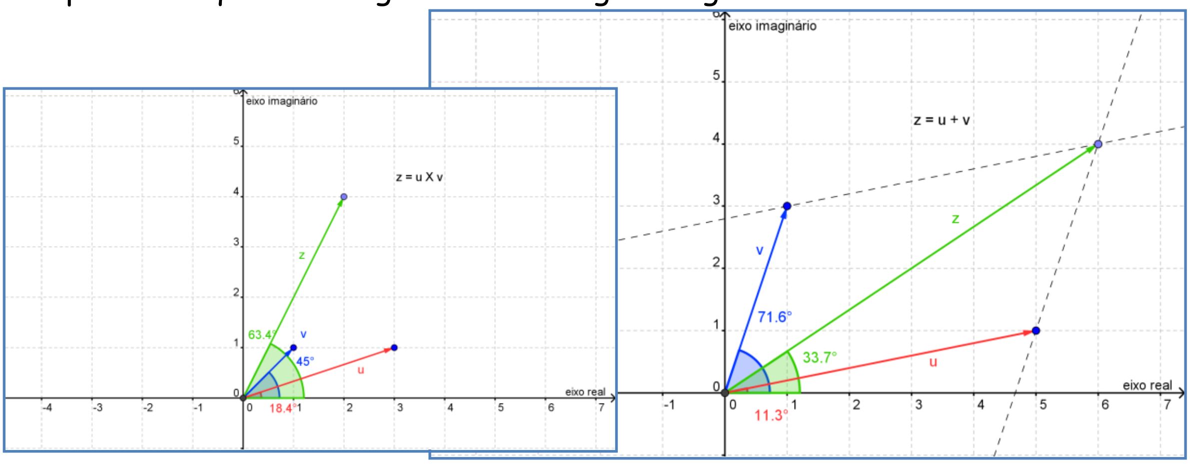
$$\cos\theta + i\mathrm{sen}\theta$$

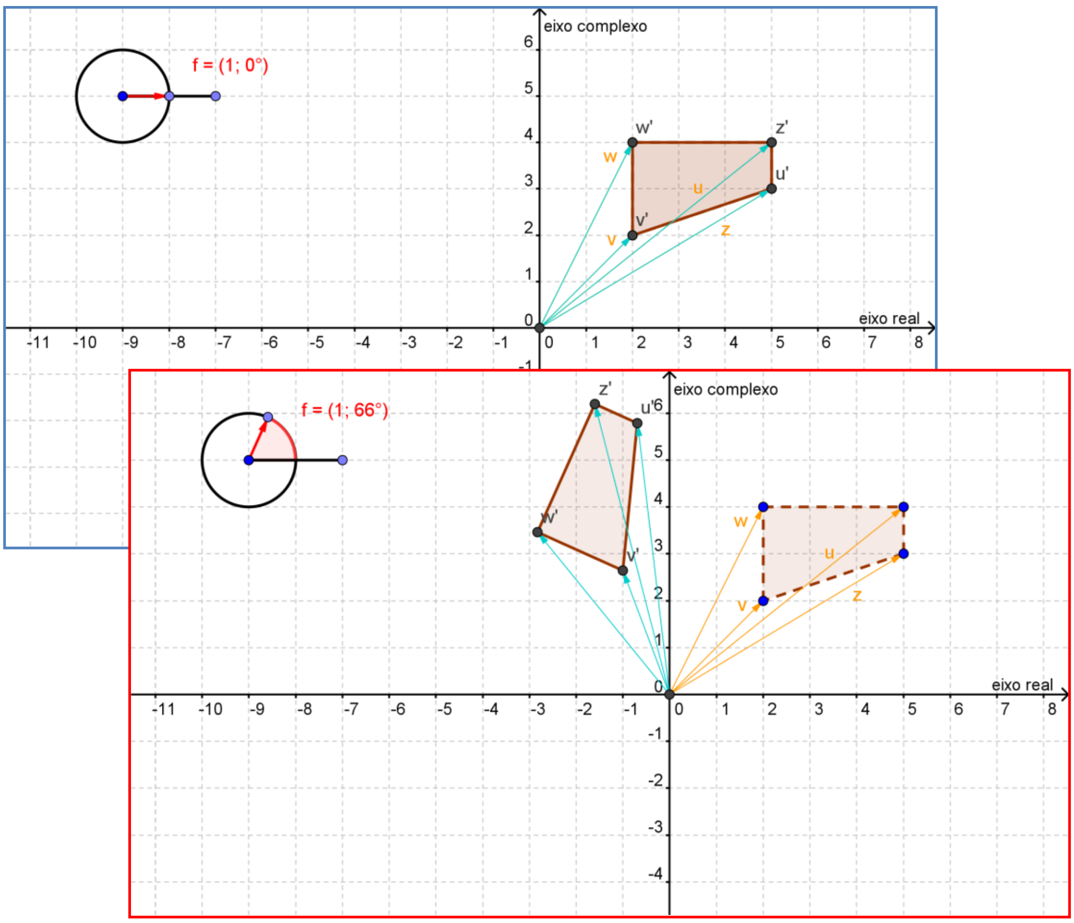
que também poderá ser indicado por

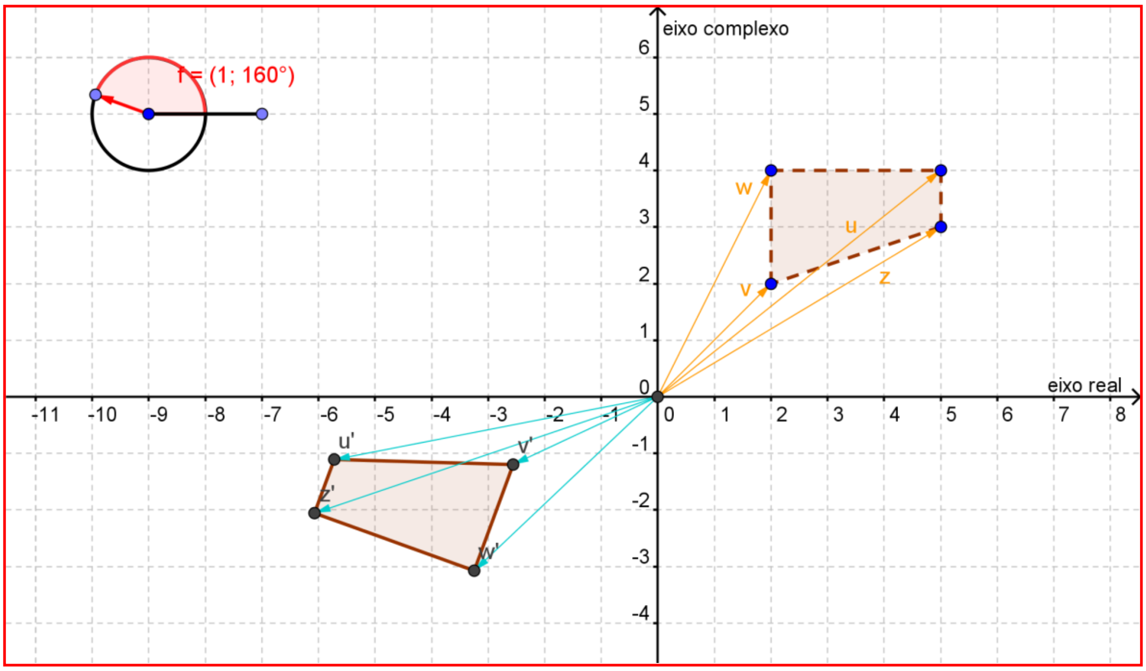
$$e^{i\theta}$$

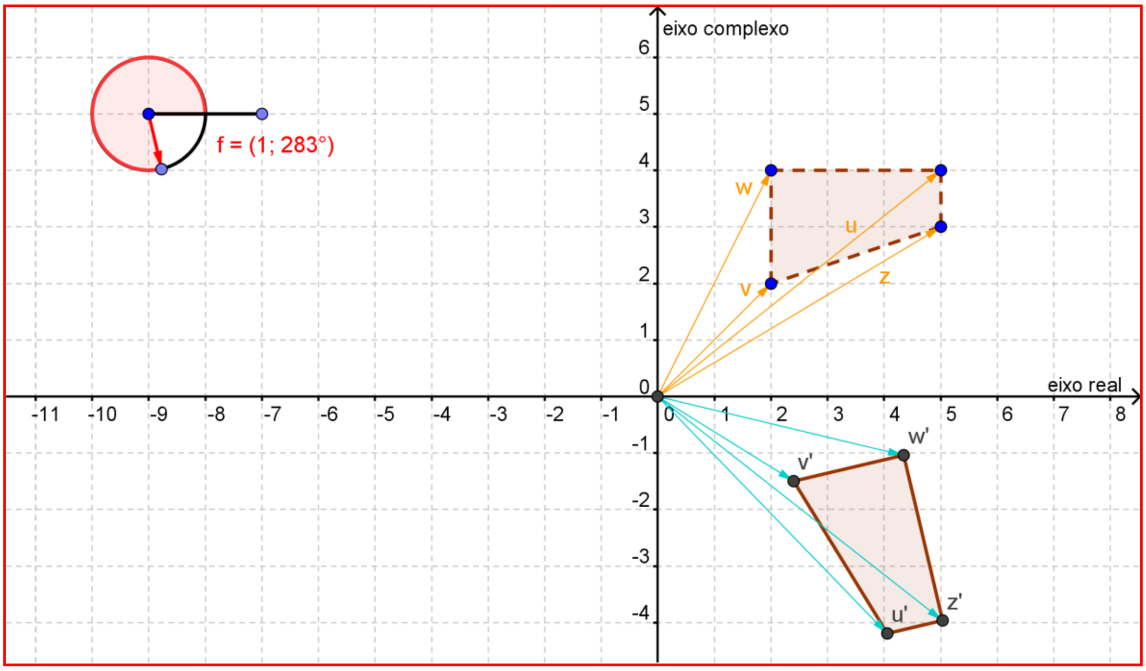
caso o professor deseje acrescentar outros significados às rotações no plano complexo.

Complementando o trabalho poderá ser pedido que os alunos desenvolvam situações de rotação de polígonos no plano complexo, utilizando os recursos que desejarem. Tal atividade poderá ser produzida em papel milimetrado com o auxílio de régua, transferidor e calculadora científica ou recorrendo-se a um software gráfico, como o Geogebra, por exemplo, a partir do qual foram geradas as imagens seguintes:






f = (1; 160°)
eixo complexo
eixo real
w
u
v
z
u'
v'
z'
w'


f = (1; 283°)
eixo complexo
eixo real
w
u
v
z
w'
v'
u'
z'

4. Conclusão

O estágio inicial para a construção do conhecimento sobre os números complexos é aquele estabelecido anteriormente pelos alunos acerca dos números Reais. A impossibilidade de se obter, no campo Real, o resultado das raízes quadradas de números negativos é apenas um dos significados, não o mais importante, que podemos associar aos números complexos. Enquadram-se nessa idéia a evolução dos conjuntos numéricos e a estrutura das propriedades, aspectos estes aos quais o professor poderá atribuir importância também relativa. Significativo, de fato, é a possibilidade de que os complexos sejam vistos como operadores de tranformações – isométricas ou não – de imagens no plano. Dessa forma, ao final, o aluno deverá ser capaz de não apenas compreender a necessidade de se utilizar números complexos para produzir estas transformações, como também produzi-las a partir de comandos que são, na verdade, operações entre os afixos dos números representados no plano. Isto feito, os alunos terão atingido um estágio de concretude que, quando comparado ao inicial, poderá ser considerado de nível superior, na medida em que o compreende e o amplia.