Universidade de São Paulo/Faculdade de Educação **março/2011**
Seminários de Ensino de Matemática (SEMA-FEUSP) – Ano IV
Coordenador: Nílson José Machado
Responsável: Marisa Ortegoza da Cunha
marisa.ortegoza@gmail.com

Uma propriedade notável do sistema ternário

Dois mais dois
Verdade esculpida em bronze,
mas ao gosto do freguês:
Dois mais dois é igual a onze,
na base três...
(Nílson J. Machado – Mattema)

A busca da base ótima

Embora adotemos o número dez como base do nosso sistema de numeração, utilizamos, em vários contextos, diferentes critérios de contagem; por exemplo, compramos xícaras e copos usualmente em dúzias, contamos minutos e segundos em grupos de sessenta, quando subdividimos a hora, ou quando medimos ângulos em graus.

De fato, qualquer número inteiro positivo (diferente de um) pode ser adotado como base de um sistema de numeração. Claro que, quanto maior o valor da base, menos algarismos serão necessários para expressar um determinado número. Por exemplo, na base 100, o número 500 se escreve com apenas dois dígitos: $(50)_{100}$, enquanto que precisaremos de nove, para escrevê-lo na base 2: $(111110100)_2$.

Então:

Qual a base ótima?

Que "medida" adotar para estabelecer uma comparação entre as bases?

Em Fomin (p.33), denomina-se *capacidade* de um sistema de numeração, o conjunto de números que pode ser escrito com uma quantidade fixada de dígitos.

Por exemplo, no sistema decimal, para escrever os mil números de 0 a 999, precisamos de 30 dígitos disponíveis (pois devemos ter os dez algarismos - de 0 a 9 – disponíveis, para a escolha de cada ordem). Já no sistema binário, com 30 dígitos (15 pares 0-1), podemos representar 2^{15} = 32 768 números, ou seja, podemos representar números que contenham até 15 ordens binárias. Assim, dizemos que o sistema binário tem maior capacidade do que o sistema decimal.

Vamos adotar a *capacidade* de um sistema de numeração como o critério para comparar bases e investigar qual seria a base ótima.

Dada uma base x, considerando-se n dígitos, podemos escrever números de até n/x ordens. A capacidade desse sistema, ou seja, a quantidade de números que podemos escrever nesse sistema será, então, $x^{n/x}$.

Vamos supor que os valores da base sejam números reais, isto é, vamos trabalhar no contínuo, e assim analisar a variação da função $y = x^{n/x}$, buscando o valor de x para o valor máximo de y, com o auxílio do Cálculo Diferencial:

$$y(x) = x^{n/x}$$

$$\ln y = \ln x^{n/x} = \frac{n}{x}.\ \ln x$$

$$\frac{d}{dx} \ln y = \frac{d}{dx} \left(\frac{n}{x}.\ \ln x\right)$$

$$\frac{1}{y}\frac{dy}{dx} = -\frac{n}{x^2}\ .\ \ln x + \frac{n}{x}\ .\ \frac{1}{x}$$

$$\frac{dy}{dx} = y\left(-\frac{n}{x^2}\ .\ \ln x + \frac{n}{x}\ .\ \frac{1}{x}\right) = x^{n/x}\ .\ \left(-\frac{n}{x^2}\ .\ \ln x + \frac{n}{x}\ .\ \frac{1}{x}\right)$$

$$Y'(x) = n\ .x^{(n/x) - 2}\ .\ (1 - \ln x)$$

Igualando a derivada a zero, obtemos: $1 - \ln x = 0 \Rightarrow \ln x = 1 \Rightarrow x = e$.

Como a derivada $Y'(x)$ é positiva à esquerda e negativa à direita de $x = e$, resulta que $x = e$ é ponto de máximo da função y.

O valor inteiro de x mais próximo de $e \cong 2{,}7182$ é 3; logo, 3 é a base do sistema de numeração de maior capacidade.

Um exemplo: tomando n = 60, temos:

Base	Capacidade
2	2^{30} = 1 073 741 824
3	**3^{20} = 3 486 784 401**
4	4^{15} = 1 073 741 824
5	5^{12} = 244 140 625
6	6^{10} = 60 466 176
10	10^{6} = 1 000 000
12	12^{5} = 248 832
15	15^{4} = 50 625
20	20^{3} = 8 000
30	30^{2} = 900
60	60^{1} = 60

E por que não computadores ternários?

Em 1958, na Universidade de Moscow, foi desenvolvido um computador ternário, chamado Setun, nome de um rio próximo dali. A equipe responsável trabalhou sob a chefia dos matemáticos Sergei Sobolev e Nikolay Brusentsov. Foram construídas apenas cinqüenta unidades, que funcionaram até 1965. EM 1970, foi desenvolvido o Setun-70.

Os envolvidos no projeto defendiam a ideia de que o sistema lógico trivalente é mais fiel ao modo de pensar do ser humano. O terceiro valor, o "talvez", faria parte da intuição, seria mais natural do que o forte e restritivo par verdadeiro/falso.

O matemático Donald Knuth chegou a prever a substituição dos sistemas computacionais binários pelo ternário, mas isso não aconteceu. Ainda hoje ocorrem, aqui ou ali, tentativas de se recuperar a ideia de uma máquina ternária, mas o potencial de economia e eficiência de tal sistema parece que ainda não encontrou forma de ser realmente viabilizado na prática.

O Setun era cerca de 2,5 vezes mais econômico do que qualquer computador binário que pudesse substituí-lo e tal economia derivava da adoção do sistema ternário balanceado. Esse sistema usa os dígitos -1, 0 e 1 (ou, simplesmente, -,0,+), em vez de 0, 1 e 2, o que agiliza as operações, reduzindo o tempo de processamento.

Por exemplo, para comparar dois ternários balanceados basta comparar os dígitos da ordem líder; para verificar se o número é positivo ou negativo, basta verificar o sinal do dígito de maior ordem; para tomar o simétrico, basta inverter os sinais de cada dígito.

A base 3 e o conjunto de Cantor

Consideremos o segmento da reta real de 0 a 1. Dividimos esse segmento em três partes iguais e retiramos o terço médio. A seguir, fazemos o mesmo com os dois segmentos restantes, isto é, dividimos cada um deles em três partes de mesma medida e retiramos a parte central. O conjunto de Cantor é formado pelos pontos que permanecem, após infinitas aplicações desse procedimento.

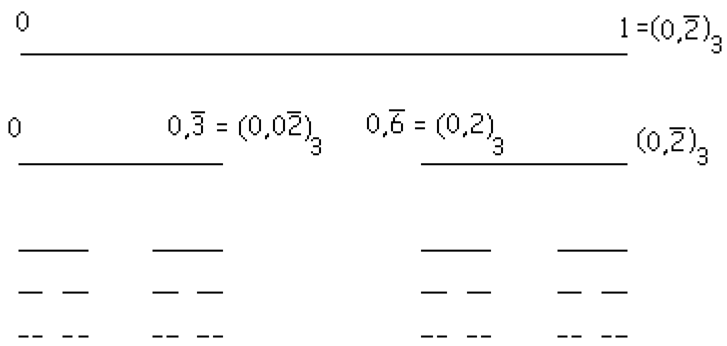
O conjunto de Cantor é especialmente interessante, pois é possível provar que consta de infinitos pontos (é não-enumerável), sendo que nenhum deles possui uma vizinhança (ou seja, pertence a algum intervalo contido no conjunto) mas que, mesmo assim, são todos pontos de acumulação (isto é, todos possuem infinitos pontos do conjunto arbitrariamente próximos de si).

O sistema de numeração de base 3 permite uma caracterização perfeita dos elementos do conjunto de Cantor. Vamos considerar cada número do segmento 0-1 escrito na base 3.

Na **primeira** iteração, é retirado o intervalo aberto]1/3 , 2/3[, ou seja, os pontos binários que estão entre 0,1 e 0,2. Isto é, os números retirados possuem o **dígito 1 na primeira** casa binária.

Na **segunda** iteração, são retirados os segmentos]1/9 , 2/9[e]7/9 , 8/9[, ou seja, os números binários entre 1/9 = $(0{,}01)_3$ e 2/9 = $(0{,}02)_3$ e aqueles compreendidos entre 7/9 =

$(0,21)_3$ e $8/9 = (0,22)_3$, ou seja, todos os pontos retirados possuem **dígito 1 na segunda** casa binária.



Prova-se, por indução finita, que na n-ésima iteração, os pontos retirados são aqueles que possuem o dígito 1 na n-ésima casa binária.

No limite desse procedimento, os pontos que permanecem **podem** ser representados apenas com os dígitos 0 e 2, (em cada iteração, os extremos dos segmentos):

Passo 1: $1/3 = (0,0222...)_3$

$2/3 = (0,2)_3$

Passo 2: $1/9 = (0,01)_3 = (0,00222...)_3$

$2/9 = (0,02)_3$

$7/9 = (0,21)_3 = (0,20222...)_3$

$8/9 = (0,22)_3$

Passo 3: $1/27 = (0,001)_3 = (0,000222...)_3$ ... e assim por diante.

Logo, podemos caracterizar o conjunto de Cantor como aquele consistindo de todos os pontos do intervalo [0,1], que **podem** ser representados na base três apenas usando-se os dígitos 0 e 2.

Bibliografia

Fomin, S. – *Sistemas de numeração* – Coleção Matemática: aprendendo e ensinando. São Paulo: Atual Editora; Moscou: Editora Mir. 1980, 1995.

Hayes, Brian. *Third Base*. http://www.americanscientist.org/issues/pub/third-base

Brousentsov N.P., Maslov S.P., Ramil Alvarez J., Zhogolev E.A. *Development of ternary computers at Moscow State University*. Russian virtual computer museum. http://www.computer-museum.ru/english/setun.htm