Seminários de Ensino de Matemática/ SEMA–FEUSP **março/2010**
Coordenação: Profº Drº Nilson José Machado

Diversas abordagens das regras de sinais nas operações elementares em Z.

Wagner M. Pommer
wmpommer@usp.br

Resumo
Este texto apresenta e discute aspectos didáticos e epistemológicos relacionados às regras de sinais referentes a operações elementares da adição e multiplicação no conjunto dos Números Inteiros. Consideramos que as múltiplas abordagens relativas às regras de sinais podem naturalmente contribuir na aprendizagem dos próprios Números Inteiros, que historicamente se constituiu em um campo com diversos obstáculos epistemológicos, com repercussões no atual ensino de Matemática. Também, acrescentamos como possibilidade a utilização da temática das regras de sinais nas operações elementares nos Inteiros como oportunidade de exploração das várias linguagens matemáticas, que articuladas permitem um enredar com diversos temas da Matemática, o que permite ampliar a rede de significados internamente ao próprio conhecimento matemático.

Palavras-chave: Números Inteiros; Regras de sinais; Obstáculos.

Introdução

Consideramos neste texto os Números Inteiros, cuja representação usual, dada por Cantor, é Z = {..., -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, ...}[1].

Enquanto que, no conjunto dos Números Naturais, os conhecimentos espontâneos e o uso de situações pragmáticas fazem parecer que as operações matemáticas decorrem 'naturalmente' da ação humana sobre objetos, o conjunto dos Números Inteiros apresentou uma evolução lenta e de difícil aceitação.

Para entender os motivos dos obstáculos surgidos durante a evolução deste conhecimento, uma análise sobre o percurso histórico revela que a:

> (...) palavra 'negativo' tem o significado de negação; isto quer dizer que se trata de 'não-números', e esta expressão é a mais adequada para mostrar as dificuldades que se opunham ao espírito humano na conquista de novos domínios no reino dos números (KARLSON, 1961, p. 42).

O estudo do obstáculo foi primeiramente investigado por Gaston Bachelard, em 1938, no livro "A Formação do Espírito Científico", e retomado por Brousseau, em 1976. Brousseau (1996) delineou distintas origens aos conhecimentos-obstáculo[2]. Os obstáculos de origem epistemológica se devem às resistências advindas do próprio conhecimento e que fazem parte da construção do saber matemático, sendo encontrados na história do desenvolvimento e evolução dos conceitos. O autor pondera que estes obstáculos não podem ser evitados, já que se constituem como porta de acesso aos respectivos conhecimentos.

---

[1] O símbolo Z provém do alemão Zahl, que remete a números contáveis, originado na concepção da Teoria dos Conjuntos.

[2] Os obstáculos de origem ontogenética se referem às limitações próprias do indivíduo, no desenvolvimento. Os obstáculos de origem didática são aqueles que se originam a partir de uma escolha didática ou de um projeto idealizado por um certo sistema de ensino. Por exemplo, tais obstáculos didáticos podem se constituir pelas escolhas das estratégias de ensino, e que podem originar erros e aprendizagens incompletas. Estes obstáculos se manifestam, segundo Chevallard, Bosch e Gascón (2001), mediante erros que são reprodutíveis, com alguma coerência interna, persistentes, resistentes e relativamente universais, necessitando de uma ação didática consciente para abordá-los.

Glaeser (1985), aponta e identifica, no percurso de formalização axiomática dos números inteiros uma série de obstáculos de natureza epistemológica, tais como:

- a dificuldade em dar um sentido a quantidades negativas isoladas;
- a dificuldade em unificar a reta numérica, expressa pela concepção da reta como justaposição de duas semi-retas opostas, o que desconsidera o caráter dinâmico e estático dos números e a diferenciação qualitativa entre quantidades positivas e negativas;
- a ambigüidade do zero absoluto e do zero como origem;
- a oposição relativa a concretude que decorre espontaneamente nos números Naturais;
- a necessidade de um modelo unificador do aditivo para o campo multiplicativo;

Outro entrave comum se localiza na falsa concepção onde o par adição/multiplicação é considerado como aumento, assim como o par subtração/divisão é erroneamente visto como diminuição. Outro problema usual está localizado na crença em atividades que valorizam a notação, porém que não necessariamente estão introduzindo e significando um novo conjunto numérico.

Um possível caminho para superar tais obstáculos é a via semântica, considerando-se contextos nas diversas formas de expressão matemática: textual, aritmética, algébrica, gráfica e computacional, articulados com a manipulação sintática. A composição deste par semântico/sintático viabiliza a utilização de diversas formas de expressão, na linguagem da disciplina, associada ao par concreto/abstrato.

O princípio da extensão

Um dos pilares que fundamentaram o desenvolvimento dos Números Naturais é a noção de operação.

Sejam dados a e b números naturais, diz-se que se efetua uma operação '$\square$' sobre a e b, nesta ordem, quando se associa um resultado $r \in \mathrm{N}$ a esta operação, ou seja: $a \square b = r$. Segundo Costa (1981), a operação '$\square$' pode possuir como características ser:

i) unívoca, quando possui um único resultado;
ii) comutativa, quando $a \square b = r$ e $b \square a = r$;
iii) associativa, quando $(a \square b) \square c = a \square (b \square c)$;
iv) distributiva em relação à outra operação '$\blacksquare$', quando $(a \blacksquare b) \square c = (a \square c) \blacksquare (b \square c)$;
v) monotônica, quando, para $a < b$, se tem $a \square c < b \square c$;
vi) possível, quando o resultado pertencer ao mesmo conjunto considerado em questão;
vii) redução: quando for possível cancelar um elemento: $a \square c = b \square c \rightarrow a = b$

No conjunto dos Números Naturais, denomina-se subtração a operação inversa da adição. Assim, na operação $a + b = s$, dados s e b, é possível encontrar o valor de a, de modo que $s - b = a$. Porém, existe uma restrição, quando se considera o conjunto dos Números Naturais, que é dada por $b \leq s$.

A redução das restrições nas operações em N está associada a um outro pilar que fundamenta o desenvolvimento dos conjuntos numéricos, denominado *princípio da extensão*. Segundo Caraça (1970), todo trabalho intelectual da humanidade é orientado por certas normas ou princípios.

Para escolher novas definições de um modo conveniente, o princípio de extensão procura adequar as definições antigas ou precedentes, com o dispêndio da mínima quantidade de energia mental ou de pensamento, abarcando assim o caminho mais rápido e curto. Na Matemática, este principio é conhecido como princípio de Hankel, que consiste em preservar as leis formais[3] já estabelecidas anteriormente.

Assim, o *princípio da extensão* revela a tendência do homem a adquirir, a completar, "(...) a generalizar e estender todas as aquisições do seu pensamento seja qual for o caminho pelo qual essas aquisições se obtêm, e a procurar o maior rendimento possível dessas generalizações pela exploração metódica de todas as suas conseqüências" (CARAÇA, 1970, p. 10).

Consideremos o caso de um cálculo onde o subtraendo é maior que o minuendo, como, por exemplo, 4 – 9, que no âmbito do conjunto dos Números Naturais é impossível.

Assim, na operação $\boldsymbol{a + b = s}$, dados $\boldsymbol{s}$ e $\boldsymbol{b}$, é possível encontrar o valor de $\boldsymbol{a}$, de modo que $\boldsymbol{s - b = a}$. Porém, existe uma restrição nesta operação inversa, quando se considera o conjunto dos Números Naturais, que é dada por $\boldsymbol{b \leq s}$ ou $\boldsymbol{s \geq b}$.

Este obstáculo epistemológico foi contornado, pela introdução de uma nova definição, de acordo com as operações no conjunto dos Números Naturais e que possibilitou a operação num novo domínio: o conjunto dos Números Inteiros.

Numa linguagem formal, dados dois números naturais $\boldsymbol{a}$ e $\boldsymbol{b}$, aplicando-se o *princípio da extensão*, originou-se uma nova definição, denominada *número relativo,* dada por $\boldsymbol{a - b}$. Se $\mathbf{a} > \mathbf{b}$, a diferença será positiva; se $\mathbf{a} = \mathbf{b}$, a diferença será nula e se $\mathbf{a} < \mathbf{b}$, a diferença será negativa.

Assim, a introdução desta definição possibilitou a operação num novo domínio: o conjunto dos Números Inteiros. Deste modo, o que surgiu de novo no campo dos Números Inteiros foram os valores negativos, originados pela possibilidade da simetrização da operação de adição.

As regras de sinais em Z.

Situar as grandezas negativas e positivas permitiu significar os cálculos aritméticos e as regras de sinais, nas operações de adição/subtração e multiplicação/divisão.

Vale destacar que as regras de sinais <u>não</u> podem ser provadas, mas sim <u>justificadas</u>. É importante que os alunos do ciclo básico saibam que tais regras não foram simplesmente inventadas, mas decorrem da necessidade de manter coerência nos princípios ou fundamentos da Matemática. Assim:

---

[3] Segundo Machado (1994), uma teoria formal consta de termos primitivos (que descrevem os objetos), regras para formação de fórmulas (que organizam o discurso a respeito dos objetos e distinguem as fórmulas bem formadas das que não tem significado) a partir deles, axiomas ou postulados (as verdades básicas, assumidas a priori), regras de inferências (que legitimam as inferências e atribui um estado de teorema a algumas fórmulas bem formadas) e teorias.

> Levou séculos para que os matemáticos percebessem que a regra de sinais, conjuntamente com todas as outras definições que governam os números inteiros e as frações não podem ser *provadas*. Elas são criadas por nós para nos darem liberdade operatória, pelo fato de preservarem as propriedades fundamentais da Aritmética. O que pode – e deve – ser *provado* é, unicamente, com base nestas definições, que as propriedades comutativa, associativa e distributiva são preservadas (COURANT; ROBBINS, 1941, p.55, grifo nosso).

Segundo Caraça (1970), a Matemática tem uma lógica própria que necessita ser ressaltada e, em algumas vezes, se situa num lugar mais adequado do que a insistência no acesso ao cotidiano, que nem sempre é o contexto mais apropriado.

Para organizarmos e delinearmos a apresentação de alguns modos de trabalho didático com os Números Inteiros assumimos algumas considerações presentes em González (1991 apud Silva, 2006) e em Crowley e Dunn (1985 apud COELHO, 2005). Assim, delineamos tais considerações nas operações de adição/subtração e de multiplicação/divisão.

A introdução de situações contextualizadas, jogos e materiais manipuláveis, associadas ao uso da linguagem matemática, expressas em diversas possibilidades, viabilizam um trabalho didático que permite superar os obstáculos epistemológicos, ao esclarecer as escolhas realizadas ao longo do percurso de construção do conhecimento matemático envolvendo os Números Inteiros.

É usual, no ciclo básico, o uso de contextualizações, geralmente evocadas em textos, tais como: temperaturas (maiores ou menores que zero), altitudes (acima e abaixo do nível do mar), deslocamentos (representados por pontos em uma reta numérica), calendário (antes e depois de Cristo), fuso horário, questões de natureza contábil (saldos positivos e negativos em transações bancárias, lucros e prejuízos em transações comerciais e contábeis).

Delíneamos tais considerações tanto na operação de adição/subtração, quanto na operação de multiplicação/divisão.

A operação de adição/subtração pela aplicação de princípios matemáticos

Para ordenar os números inteiros na operação de adição/subtração, González (1991 apud Silva, 2006) propõe três modelos básicos: o aritmético, o algébrico e o geométrico.

O Modelo Aritmético

Neste modelo, parte-se do conjunto dos Números Naturais e mostra-se a insuficiência desse conjunto. São utilizadas situações concretas evocadas, porém devem ser utilizadas generalizações conceituantes, associadas à abstração.

No ensino, é muito comum a utilização da metáfora ganho (positivo) e perda (negativo), que tem origem histórica. Estas concepções hindus chegaram ao ocidente pelo expansionismo do Império Árabe. Os comerciantes da época passaram a utilizar sinais para indicar a falta ou excesso de algum produto confinado em algum tipo de embalagem (sacas ou tonéis).

Intuitivamente, podemos considerar inicialmente um exemplo que ilustra o conceito de número relativo: a escala de tempo conhecida como o calendário juliano ou gregoriano. As datas que antecedem a data convencionada para o nascimento de Jesus, considerada como origem, são consideradas antes de Cristo (a.C.) e as datas posteriores são denominadas depois de Cristo (d.C.).

Um segundo exemplo com relação às operações em Z, é a referência à escala termométrica. Supondo que num certo instante do dia a temperatura seja de 20 ºC e num instante posterior a temperatura diminua para 15ºC. Então, a temperatura cai 5ºC, ou seja, - 5º C. Deste modo, atribuí-se a diminuição de temperatura um sinal negativo. Em notação aritmética: 15 – 20 = - 5 ºC. Caso houvesse um aumento de temperatura, seria atribuído um sinal positivo.

Estes dois exemplos, muito comuns em livros didáticos, reforçam a idéia de ganho como um sinal positivo e perda com o sinal negativo. Porém, Gonzáles (1991 apud Silva, 2006) adverte que estas situações do cotidiano devem ser utilizadas com moderação. Além disso, este modelo metafórico ganho/positivo e perda/negativo é somente válido nas operações de adição/subtração, não permitindo a extensão deste modelo para as operações de multiplicação/divisão, o que já se constitui em um obstáculo.

O Modelo Geométrico

Este tipo de modelo essencialmente emprega a reta real, com uma origem O e um sentido positivo, porém existem variações.

Uma situação que permite justificar a regra de sinais na adição/subtração e faz apelo a representação geométrica é citada em Caraça (1970). Um ponto material sofre sucessivos deslocamentos, a partir de um marco inicial (que pode ser adotado como origem dos espaços ou zero), em dois possíveis sentidos: para a direita ou esquerda. Poderíamos convencionar os pontos para a direita como referência positiva ou negativa; porém, a Matemática estabeleceu os pontos à direita da origem como positivos e aqueles a esquerda como negativos, conforme se observa na figura 1. Assim, a reta orientada é aquela que possui um ponto de referência, considerada a origem O, uma direção e dois sentidos: de O para a direita, onde são posicionados os valores positivos e de O para a esquerda, onde são considerados os valores negativos.

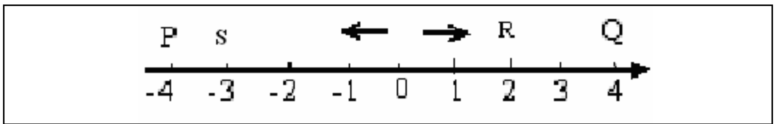

Figura 1: A reta orientada, com indicação de alguns valores inteiros.

Podemos representar a distância de 0 a 1, de natureza contínua, na reta orientada em questão, correspondendo a menor unidade de medida ***u**, situada* no âmbito do conjunto dos Números Inteiros. Então, qualquer outra medida de um ponto P genérico sobre a reta orientada poderia ser expressa por: $\overline{\mathrm{OP}} = a.\overline{u}$, onde ***a*** é a medida algébrica do segmento $\overline{\mathrm{OP}}$, podendo ter valor negativo, positivo ou nulo.

Na figura 1, para distinguir os pontos P e Q, ambos distando 4 unidades da origem O, atribui-se o sinal indicativo do sentido do movimento. Assim, o ponto P tem abscissa -4 e o ponto Q tem abscissa 4. O que difere os pontos P e Q se refere a uma qualificação, no caso devido ao sentido dos pontos em relação a origem O: o ponto P situa-se no sentido Oeste e o ponto Q no sentido Leste.

A utilização do recurso da reta numérica nesta situação associa a concepção de 'sentido de percurso' (negativos no sentido oeste ou para a esquerda da reta numérica e positivos para leste ou direita), com a ideia geométrica da imagem ou simétrico de um objeto, no caso um número.

Consideremos ainda a figura 1, mas supondo um outro deslocamento. Seja um móvel que parte da origem em sentido ao ponto Q, percorrendo 4 unidades. Em seguida, este se dirige ao ponto R, se deslocando 2 unidades no trajeto de Q para R. O deslocamento do móvel no percurso de O a R pode ser observado diretamente da figura ou obtido pela operação de subtração: 4 -2 = 2 unidades.

Agora, qual seria o deslocamento do móvel, partindo do ponto O, se dirigindo até o ponto Q e depois se direcionando até o ponto S? Da origem até R, o móvel se desloca 4 unidades e do ponto R até o ponto S o móvel se desloca por 7 unidades, em sentido contrário. Daí, o deslocamento resultante de O para S seria dado pela inspeção visual, observando que ele se desloca 3 unidades para a esquerda ou pela operação de subtração: 4 – 7 = -3.

Existem variações do modelo geométrico em situações-problema envolvendo operações de adição/subtração, que podem acrescentar significado às regras de operações.

Uma das possibilidades foi apresentada por Vergnaud, em 1976 (apud Damm, 2002), que situa os obstáculos na compreensão nos problemas aditivos ao modo como os dados estão colocados no texto (obstáculos redacionais) e não ao cálculo numérico. Para o autor, as dificuldades se situam na ordem temporal que são apresentados os dados, na congruência ou não-congruência e na presença de verbos portadores de informação numérica.

O caso da inversão na ordem temporal ocorre quando for trocada a exposição dos dados, ou seja, se forem dados um resultado parcial e o total e for solicitado o(s) outro(s) dado(s) parcial(ais). O caso da não-congruência se refere à não existência de correspondência semântica entre a escrita léxica com a operação (o sinal positivo com a operação de adição e o sinal negativo com a operação de subtração). Quanto aos verbos, a existência de antônimos é fator de dificuldades (ganha/perde; sobe/desce).

O esquema gráfico apresentado pelos autores consiste em se colocar no eixo vertical os valores numéricos e no eixo horizontal se registra a ordem temporal (antes, durante e depois).

Consideremos um primeiro exemplo: "Paulo tem duas bolinhas. Joga duas partidas. Na primeira, ganha 3 bolinhas. Na segunda, perde 1 bolinha. O que acontece no final?" (VERGANAUD; DURAND, 1976 apud PASSONI; CAMPOS, 2002, p. 53), que está representado na figura 2.

Nesta situação, de fácil entendimento, ocorre uma ordem temporal, pois são dados os valores das partidas na ordem em que ocorrem, ocorre a congruência (o sinal '+' corresponde a um ganho e o sinal '-' corresponde a uma perda, porém há presença de verbos antônimos ganho/perda).

Um segundo exemplo, representado na figura 3, é apresentada uma situação de inversão temporal, não congruência e com a presença de verbos antônimos, o que exige uma maior mobilização do aluno.

> Bruno joga duas partidas de bolinhas de gude. Joga uma primeira partida e depois uma segunda. Na segunda partida ele perde 7 bolinhas. Depois dessas duas partidas, ganhou 3 bolinhas. O que aconteceu na primeira partida? (VERGANAUD; DURAND, 1976 apud PASSONI; CAMPOS, 2002, p. 50).

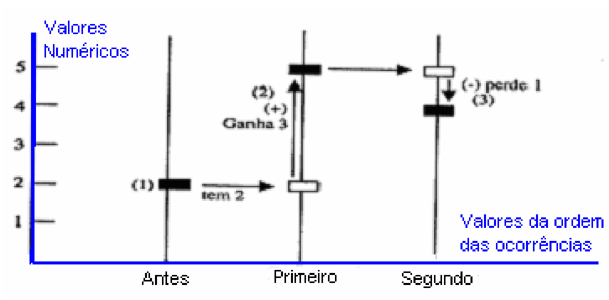

Figura 2: A representação gráfica do problema de Paulo.

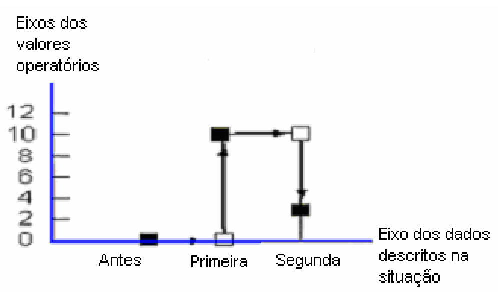

Figura 3: A representação gráfica do problema de Bruno.

O modelo algébrico

A partir da equação $x + a = b$, em N, existe solução se $b > a$ ou $b = a$.

Por um largo período de tempo, houve dificuldades por parte da comunidade de filósofos em considerar os números negativos como solução.

O ambiente algébrico é favorável aos problemas aditivos, fato percebido por Vergnaud. O uso deste ambiente permite redução do obstáculo, inserindo um *habitat natural* para os problemas aditivos. Acrescenta-se a isso uma excelente oportunidade de trabalho das linguagens gráfica, aritmética e algébrica, o que constitui em contribuição para o estudo dos 'problemas de passagem da Aritmética para a Álgebra'.

Retomando um dos problemas aditivos apresentados por Vergnaud – o problema de Bruno - denominando-se *x* a quantidade desconhecida (incógnita) que, então, representa a quantidade de bolinhas de gude que Bruno tem na 1ª partida, tem-se a escrita algébrica $x + (-7) = 3$. Daí decorre facilmente que $x = 10$, ou seja, Bruno tinha 10 bolinhas.

O Modelo Conjuntista

O surgimento do Cálculo Diferencial e Integral, no século XVII, de Newton e Leibnitz proporcionou uma oportunidade de sistematizar o conjunto dos Números Inteiros. No século XIX, através do domínio de integridade, surgiu uma opção de uma construção conjuntista, através do conceito de classe de equivalência, considerando-se a estrutura algébrica de Z como Anel Abeliano.

Em tal sistema, é possível fazer corresponder os números inteiros a um par ordenado, de modo que qualquer número inteiro positivo **a** está associado ao par canônico **(a;0)** e qualquer número inteiro negativo **-a** está associado ao par canônico (0;a). Por exemplo, 5 = (5;0) e -5 = (0;5).

Para as operações de adição/subtração, faz-se necessário somar as coordenadas correspondentes, o que equivale a somar os 1^{os} e 2^{os} elementos correspondentes do par ordenado. Um exemplo desta operação é: -3+4 = (0;3) + (4;0)= (4;3) =1. Ainda: -3-4 = (0;3) + (0;4)= (0;7) = -7.

Com estes pressupostos, as regra da adição considerando-se o modelo conjuntista é dado por:

(a;0) + (b;0) = (a+b;0) = a+b (A soma de dois inteiros positivos é positiva)

(0;a) + (0;b) = (0; a+b) = -(a+b) (A soma de dois inteiros negativos é negativa)

(a;0) + (0;b) = (a;b)= a-b. Se a>b, então o resultado é positivo e se a<b negativo.

A operação de multiplicação/divisão no conjunto dos Números Inteiros

Para ordenar os números inteiros na operação de multiplicação/divisão, utilizaremos estrutura semelhante a proposta para a adição/subtração.

O Modelo Aritmético

Euler, no século XVIII d.C., baseando-se na metáfora hindu, propôs que subtrair um número negativo é similar a adicionar um positivo, assim como cancelar uma dívida é o mesmo que ganhar um presente. Este discurso metafórico de Euler é apontado na pesquisa de Silva (2006). Um dos professores entrevistados utiliza em sala de aula a seguinte situação: “Um filósofo matemático me disse: Tenho 6 amigos, e para cada um devo 11 moedas. Portanto, devo 66 moedas. Mas, por infelicidade, os 6 amigos morreram. Logo, fiquei 66 moedas mais rico” (p. 45). Em notação aritmética: (-6)*(-11) = 66.

Coelho (2006) apresenta a explicação usual das regras, que se baseia em propriedades aritméticas:

Multiplicação composta de parcelas positivas

Nesta situação, é utilizada a definição da operação de multiplicação, ou seja, a soma sucessiva de parcelas iguais, como no exemplo: 2 * 3 = 3 * 2 = 6 ou 3 * 2 = 2 + 2 + 2 = 6.

Multiplicação composta de multiplicador positivo e multiplicando negativo

Neste caso, pelo princípio da extensão, esta situação recai na proposta acima descrita, como no exemplo: 2*(-3) = (-3) + (-3) = -6

Multiplicação composta de multiplicador negativo e multiplicando positivo

Nesta situação, utiliza-se a propriedade comutativa para recair na situação anterior, como no exemplo:

(-2) * 3 = 3* (-2) = -6.

Multiplicação composta de parcelas negativas

Segundo a Proposta Curricular do Estado de São Paulo (1988), tal situação remete a utilização da propriedade do elemento neutro na adição e na operação da multiplicação de um número inteiro por zero. Por exemplo, para explicar que (-2) * (-3) = 6, tal documento aponta que:

3 * (-2) = (-2) + (-2) + (-2) (definição de multiplicação estendida)

Pela existência do elemento neutro na adição, tem-se que (+3) + (-3) = 0. Considerando-se que todo número multiplicado por zero é igual a zero, então: (-2) * 0 = 0. Destas sentenças, decorre que: (-2) * [(+3) + (-3)] = 0. Pela aplicação da propriedade distributiva da multiplicação em Z, tem-se que:

(-2) * (+3) + (-2) * (-3) = 0. Como (-2) * (+3) = -6, então a sentença fica: (-6) + (-2) * (-3) = 0, ou ainda: -2 * (-3) = 6, pela propriedade do inverso aditivo em Z.

O Modelo Físico/Geométrico

Os chineses foram o primeiro povo a aceitar a idéia dos números negativos[4]. Há registros de soluções negativas de problemas indeterminados, resolvidos por escalonamento[5]. Esta situação:

> (...) parece não ter causado muitas dificuldades aos chineses, pois estavam acostumados a calcular com duas coleções de barras – uma vermelha para os coeficientes positivos ou números e uma barra preta para os negativos. No entanto, não aceitavam a idéia de um número negativo poder ser solução de uma equação (BOYER, 1991, p. 145).

Em cerca de 300 a.C., utilizavam 'numerais em barras'[6], feitas de bambu, marfim ou ferro, muito usada por administradores, que se revelou uma ferramenta rápida e eficiente para efetuar cálculos. Segundo Boyer (1991), o uso de barras sobre uma tábua foi um precursor do ábaco[7].

Segundo Coelho (2005), uma possível justificativa para a abstrata r*egra de sinais* para a multiplicação pode ocorrer através do *ábaco dos inteiros*. Este ábaco consiste num material manipulável, inspirado no modelo de 'numerais em barra' do antigo povo chinês.

No sistema de barras, se quisermos efetuar 2*3, basta aplicar a definição: 2*3 = 3 + 3 = 6. Isto representa desenhar dois grupos de 3 quadrados vermelhos. Aplicando a propriedade comutativa, podemos ainda calcular: 2*3 = 3*2 = 2 + 2 + 2 e, assim, desenhar três grupos de dois quadrados vermelhos. Ambas representações dos 'numerais em barras' e no ábaco dos inteiros estão representadas na figura 4.

---

[4] Para Martzloff (1997 apud Anjos, 2008), a aceitação dos números negativos na matemática chinesa ocorreu na visão de opostos complementares, que perpassa os fundamentos filosóficos da cultura chinesa (yin&yang). Assim, na matemática chinesa, o par positivo/negativo, expressava características complementares de um mesmo número, de modo que não havia números opostos.

[5] Estes problemas encontram-se no *Chiu Chang*, uma das primeiras obras da matemática chinesa, de 202 a. C, que tratava de questões envolvendo mensuração de terras, agricultura, sociedades, engenharia e impostos.

[6] O 'numerais em barra' derivam de um *sistema de notação posicional* desenvolvido na China, cuja origem não é datada com precisão (cerca de alguns séculos antes de Cristo) e certamente anterior ao sistema posicional hindu. Os 'numerais em barra' perduraram durante séculos, até o surgimento do ábaco.

[7] O ábaco, conhecido na China por *suan pan*, e no Japão por *soroban*, surgiu por volta do século XVI. "A palavra *abacus* provavelmente deriva da palavra semítica *abq* ou pó, indicando que em outras regiões, como na China, o instrumento proveio de uma bandeja de areia usada como tábua de contar" (BOYER, 1991, p. 145).

Operação	Representação figural	Multiplicador	Multiplicando
3 + 3 = 6	■■■ ■■■	2	3
2 + 2 + 2 = 6	■■ ■■ ■■	3	2

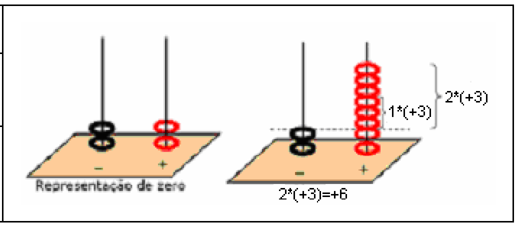

Figura 4: A representação no sistema de barras chinesas do cálculo 2x3 e no ábaco dos inteiros, em Coelho (2005).

No caso da operação 2*(-3), basta aplicar a definição: 2*(-3) = -3 +(-3) = - 6. Figuralmente, isto representa desenhar dois grupos de três quadrados pretos, conforme a figura 5.

Operação	Representação figural	Multiplicador	Multiplicando
2*(-3) = (-3) + (-3)	■■■ ■■■	2	- 3

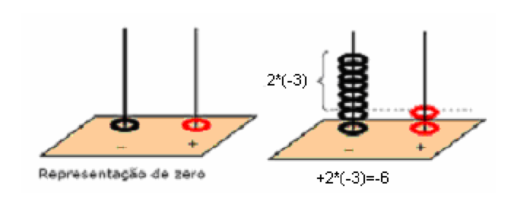

Figura 5: A representação no sistema de barras chinesas do cálculo 2*(-3) e no ábaco dos inteiros.

Considerando-se agora a operação (-2)*3. Esta situação equivale a imaginar duas vezes a retirada sucessiva do número 3. Assim, partindo-se do zero, retiramos duas vezes uma quantidade positiva, ou seja, retiramos dois grupos contendo, cada um, três quadrados vermelhos, representados na figura 6:

Antes	Depois
■■■ ■■■ ■ = -1 ■■■ ■■■ ■ = +1	■■■ ■■■ ■ = -1 ■ = +1

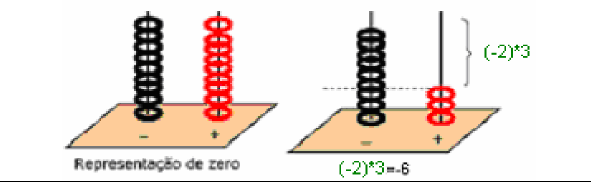

Figura 6: A representação no sistema de barras chinesas do cálculo (-2)*3 e no ábaco dos inteiros, em Coelho (2005).

Em linguagem aritmética: (-2) * 3 = 0 – (+3) – (+3) = 0 – (■■■) – (■■■) = -6.

Por último, considerando-se agora a operação (-2) * (-3). Isto equivale a retirarmos duas vezes o número -3, partindo de uma situação equivalente a zero. Assim, na linguagem aritmética:

(-2) * (-3) = 0 – (-3)– (-3) = 0 – (■■■) – (■■■) = 6. Figuralmente:

Antes	Depois
■■■ ■■■ ■ = -1 ■■■ ■■■ ■ = +1	■ = -1 ■■■ ■■■ ■ = +1

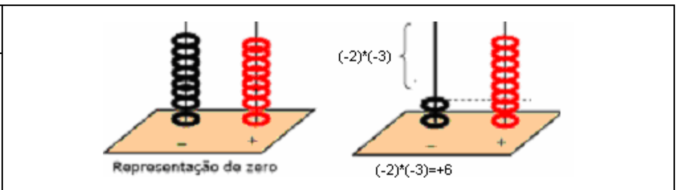

Figura 7: A representação no sistema de barras chinesas do cálculo (-2)*(-3) e no ábaco dos inteiros, em Coelho (2005).

Coelho (2005) destaca algumas vantagens da abordagem pelo *ábaco dos inteiros*: uma dinâmica que incentiva a motivação, participação e envolvimento dos alunos; a oportunidade de construir um modelo concreto, de simples operacionalização e que permite abstrair as regras de sinais; um recurso que melhora da compreensão da regra dos sinais nas atividades de cálculo numérico envolvendo as operações com inteiros. Adiciona-se o fato que problemas aditivos, geralmente, tem enunciados contendo contextos de situações evocadas ou anunciadas, mas não experimentadas pela criança.

De acordo com Mialaret (1975 apud Coelho, 2005), o recurso do *ábaco dos inteiros* envolve várias etapas em problemas de operações: a ação realizada pela criança, através da manipulação de objetos físicos; o agir acompanhado de linguagem escrita e do gesto; a presença e condução de narrativa no processo; a ação com material não-figurativo; a possibilidade de um duplo registro, de caráter simbólico pela tradução gráfica/numérica, num duplo movimento.

O modelo funcional.

Outro processo para explicar a regra de sinais na multiplicação é a generalização de padrões. Ao escrever uma determinada 'tabuada', é possível observar os resultados numéricos da seqüência e perceber o padrão de formação, o que permite inferir a regra de sinais, que exemplificamos nas tabelas 1 e 2 .

Operação	Resultado
2*3 =	6
1*3 =	3
0*3 =	0
(-1)*3 =	-3
(-2)*3 =	-6

Tabela 1

Operação	Resultado
2*(-3) =	-6
1*(-3) =	-3
0*(-3) =	0
(-1)*(-3) =	3
(-2)*(-3) =	6

Tabela 2

O Modelo Conjuntista

O modelo conjuntista apresentado anteriormente, também pode ser utilizado para justificar as regras de sinais da operação de multiplicação/divisão.

Sejam a = (a;0) e -a= (0;a). Em relação ao produto de dois números inteiros, tem-se a definição: x*y=(a;b).(c;d) = (a*c + b*d; a*d + b*c).

Assim, por exemplo: 3*2 = (3;0)*(2;0)= (3*2+0*0;3*0+2*0)=(6;0) = 6.

Também: 3*(-2)= (3;0)*(0;2)= (3*0+0*2;3*2+0*0)= (0;6) = -6.

Deste modo, as regras de sinais para a multiplicação/divisão na perspectiva conjuntista ficam:

(a;0) * (b;0) = (a*b+0*0;a*0+0*b)= (a*b;0) = a*b.

(A multiplicação de dois inteiros positivos apresenta sinal positivo).

(-a)*(-b) = (0;a) * (0;b) = (0*0 + a*b; 0*b + a*0)= (a*b;0) = a*b.

(A multiplicação de dois inteiros negativos apresenta sinal positivo).

(a;0) * (0;b) = (a*0+0*b;a*b+0*0)= (0;a*b)= - a*b, ou

(0;a) * (b;0) = (0*b+a*0;0*0+a*b)= (0;a*b)= - a*b.

(A multiplicação de um inteiro negativo e um inteiro positivo apresenta sinal negativo).

Observação: Uma visualização figural em relação a definição do produto de dois números inteiros no modelo conjuntista dada por x*y=(a;b)*(c;d) = (a*c + b*d; a*d + b*c) é apresentada abaixo. Consideremos duas retas perpendiculares como orientação, tal qual mostrado na figura 9. Inicialmente, se localiza o valor correspondente a ‘x’. Assim, x= (x;0) no eixo horizontal representa um ponto à direita de O e ‘-x’=(0;x) representa a medida de pontos à esquerda de O. O valor de ‘y’ é marcado sobre o eixo vertical, segundo a convenção: ‘y’=(y;0) é representado acima de O e a medida ‘-y’=(0;y) é representada abaixo de O.

Para se efetuar a operação (-x)*y, basta localizar o valor ‘-x’=(0;x), a esquerda de O e traçar um segmento que une ‘-x’ a ‘1’. A seguir, marca-se o valor de y na reta perpendicular e traça-se a paralela a reta suporte do segmento anteriormente traçado, obtendo-se o valor desejado sobre o eixo horizontal.

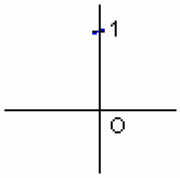	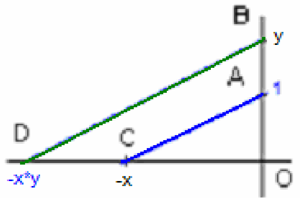	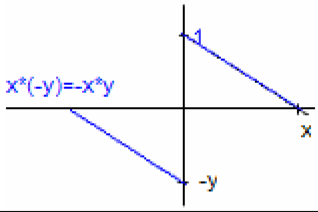	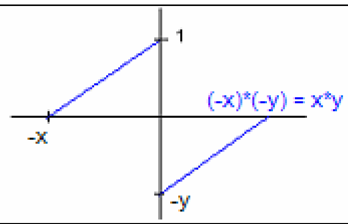
Figura 9a	Figura 9b: O produto (-x)*y.	Figura 9c: O produto x* (-y).	Figura 9d: O produto (-x)* (-y).

Na figura 9b, o valor ‘-x’= (0;x) e ‘y’= (y;0). Utilizando a semelhança entre os triângulos OAC e OBD, tem-se: $\frac{1}{(0;x)}=\frac{(y;0)}{m}\to m=(0;x)*(y;0)=(0*y+x*0;0*0+x*y)=(0;x*y)=\text{-}x*y$.

Na figura 9d, o valor ‘-x’= (0;x) e ‘-y’= (0;y). Utilizando a semelhança, tem-se: $\frac{1}{(0;x)}=\frac{(0;y)}{m}\to m=(0;x)*(0;y)=(x*y;0)=x*y$.

Considerações Finais

A introdução de situações contextualizadas, jogos e materiais manipuláveis, associadas ao uso da linguagem matemática, expressa em diversas possibilidades, viabilizam um trabalho didático que permite superar os obstáculos epistemológicos, ao esclarecer as escolhas realizadas ao longo do percurso de construção do conhecimento matemático envolvendo os Números Inteiros.

Alia-se a esta articulação a possibilidade de retomar o tema das regras de sinais em diversos momentos do ensino básico, o que esclarece o entendimento da própria opção que historicamente ocorreu em relação as regras, assim como enriquece a teia de significados em torno dos assuntos presentes no currículo de Matemática.

Referências Bibliográficas:

ANJOS, M. F. **A Difícil Aceitação dos Números Negativos**: Um Estudo da Teoria dos Números de Peter Barlow. 2008. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências Naturais e Matemática. Universidade Federal do Rio Grande do Norte, Natal. Disponível em: <http://www.ppgecnm.ccet.ufrn.br/publicacoes /publicacao_86.pdf>. Acesso em 104 jan 2010.

BOYER, C. B. **História da Matemática.** 9. ed. São Paulo: Editora Edgard Blücher, 1991.

BROUSSEAU, G. Fundamentos e Métodos da Didáctica da Matemática. In: BRUN, J. **Didática das Matemáticas.** Tradução de: Maria José Figueiredo. Lisboa: Instituto Piaget, 1996a. Cap. 1. p. 35-113.

CARAÇA, B. J. **Conceitos Fundamentais da Matemática**. 5. ed. Portugal: Lisboa, 1970.

CHEVALLARD, Yves, BOSH, Mariana, GASCON, Josep. **Estudar Matemáticas**: o elo perdido entre o ensino e a aprendizagem. Porto Alegre: Artmed, 2001.

COELHO, M. P. F. **A MULTIPLICAÇÃO DE NÚMEROS INTEIROS RELATIVOS NO 'ÁBACO DOS INTEIROS':** UMA INVESTIGAÇÃO COM ALUNOS DO 7.º ANO DE ESCOLARIDADE. 2005, Dissertação (Mestrado em Educação), Universidade do Minho, Braga.

COSTA, M. A. **As Idéias Fundamentais da Matemática e Outros Ensaios**. 3. ed. São Paulo: Edusp, 1981.

COURANT, R.; ROBBINS. **WHAT IS Mathematics?** An elementary approach to ideas and methods. London: Oxford University Press, 1941.

DAMM, R.F. Representação, Compreensão e Resolução de Problemas Aditivos. In: MACHADO, S. D. A. **Aprendizagem em Matemática.** Campinas: Papirus, 2002.

GLAESER, G. **Epistemologia dos Números Negativos**. Rio de Janeiro: Boletim GEPEM, 1985.

KARLSON, P. **A Magia dos Números**. Rio de Janeiro: Editora Globo, 1961.

MACHADO, N. J. **Epistemologia e didática**: as concepções de conhecimento e inteligência e a prática docente. São Paulo: Cortez Editora, 1995.

________________. **Matemática e Realidade**. 3. ed. São Paulo: Editora Cortez, 1994.

MEDEIROS, A.; MEDEIROS, C. **Números negativos**: uma história de incertezas In: BOLEMA: Boletim de Educação Matemática. Rio Claro: DM/UNESP/Campus Rio Claro. Ano 7, n. 8. 1992, pp. 49-59.

PASSONI, J. C. ; CAMPOS, T. M. M. Revisitando os Problemas Aditivos. In: MACHADO, S. D. A. **Aprendizagem em Matemática.** Campinas: Papirus, 2002.

SÃO PAULO. **Proposta Curricular do Estado de São Paulo**: Matemática/ Ensino Fundamental (ciclo II) e Médio. São Paulo: SEE, 2008.

SILVA, A. R. **O Livro Didático e o discurso do professor no ensino das operações com números inteiros para alunos do ensino de jovens e adultos**. 2006, Dissertação (Mestrado em Educação Matemática), Pontifícia Universidade Católica de São Paulo.

STRUIK, D. J. **História Concisa das Matemáticas. 2. ed.** Trad: João Cosme Santos Guerreiro. Lisboa: Gradiva, 1992.

TEIXEIRA, LENY RODRIGUES MARTINS. **APRENDIZAGEM OPERATÓRIA DOS NÚMEROS INTEIROS:** História, Obstáculos Epistemológicos e Estratégias Didáticas. São Paulo, *Pro-posições*, v. 4, n. 1[10], p. 60-72, 1993. Disponível em: <http://www.inep.gov.br/pesquisa/bbe-online/det.asp?cod=68853&type=P >.